第一章、算法（第1部分）

1. 贪心算法
2. 在一个点图中，没有顶点度数超过，求证：可以将所有顶点用至多染色，使得没有两个相邻顶点染色相同。

解：贪心算法，将所有颜色从小到大编号，从任意一个顶点出发，依次将顶点染色，每个顶点用不同于其相邻顶点的颜色染，由于颜色数多于相邻顶点数，所以遍历整个图即可。

拓展：可以思考染色数，即最少用多少种颜色染顶点，可使中相邻顶点不同色。这个数和图兰定理、部图是有关系的。

1. 在一个的数组中，每个数都是正实数，每一列中两个数加起来是，求证我们能在每一列中选择一个数，使得每行中被选的数的总和至多是.

解：若每一列中取较小的数，则这个算法显然不总可行（比如第一行都是0.4，第二行都是0.6），所以我们要用更聪明的算法，不妨设上面一行是非减的，下面一行对应位置是，则是非增的一列数。进一步假设上面一行的和是小于等于下面一行的数的和，这种排序是常用的，因为它提供了一些结构。

下面再用贪心算法，从开始选，从小到大，尽量多地取，即但是，然后我们从这个指标起选择下面一行的元素，下面证明下面一行所选元素和至多，即证

因为.

，最后一个等号容易验证：

即证：，即其中，

由耐克函数性质即得。

1. 在图中，有个顶点，条边，求证有一个继承的子图，使得每个顶点有至少度，（也即对于一个平均度数为的图，必存在有一个继承的子图，使得其每个顶点度数至少是）.

解：平均度数为，所以直观上要去掉“坏的”点：度数的顶点。因此一个自然的算法如下：从图开始，如果存在一个顶点度数，则删除该顶点以及与其相连的边。

此过程一定会剩下一个“好的”子图，注意到边数与顶点数的比例在这个过程中是严格递增的，因此不可能这个过程最终只剩一个顶点（这意味着变成0）矛盾。

1. 一个由三个非负整数组成的集合被称为“历史集”，当且仅当其元素满足且，求证：非负整数全体构成的集合可以表示为历史集的无交并。

解：将换位任意的一对正整数，结论都成立。记

一个“历史集”为或,分别称这两者为小集合和大集合。

直观1：在任何时刻，最小的一个没被覆盖的元素是最不安全的，（例如最小的未被覆盖的元素是，但是被覆盖了，则我们永远不能覆盖），所以每一步我们都从最小的开始覆盖。

直观2：从直观1得到，我们的算法应该更倾向于先覆盖小的数，所以我们更喜欢小集合。

用贪心算法：每一步都找一个没有被历史集覆盖的最小的，如果能够用小集合覆盖则用小集合覆盖；如果不能，则用大集合覆盖.

假设上述贪心算法在某一步失败（即既不能用小集合也不能用大集合覆盖），不妨设为第步，令为第步所选取的的值，第步前没有被覆盖，未被覆盖，因为.所以以及已被覆盖，进一步是被覆盖的最大的数，所以对应的历史集中最小的数是，因为此时还未被覆盖，且我们优先会选用小集合，即是一个小集合，所以被覆盖，矛盾。

1. 不变量和单调量
2. 的棋盘上每格填入一个自然数，允许的操作是在相邻的两个数上加上同一个数，使得新得到的数仍然是非负整数。求使得所有格通过有限步操作全变成0的充要条件。

解：黑白双色染色，黑格中的数总和，白格中的数总和，所以是不变的，即，这是必要的，下面我们证明这是充分的我们可以用一个顺序，先在每一行中相邻两位置上分别加上一些正数，使得每行都是递增的，再在相邻两格（其中）同时加上，于是转化为所有非0的数在一列上，最后在这一列上进行类似的操作，即得。

1. 有个人围坐在一个圆桌边，将个饼干分配给他们，饼干可由下面的规则传递：
2. 每个人只能将饼干递给邻座；
3. 每次有人传递一个饼干，他必须自己也吃掉一个。

设是这些人中的某个人，求最小的，使得无论块饼干初始时怎么分配，都有将至少一块饼干传递给的策略。

解：假设这个人标号分别为，其中，并记，我们给不同人的饼干一个不同权重，其中的权重为，记，

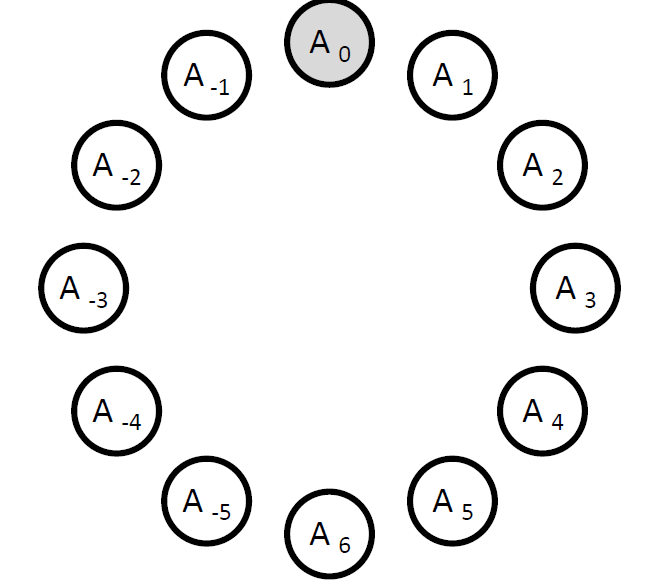
当一块饼干向靠近的方向传递时，值不变；当一块饼干向远离的方向传递时，值变小；所以是个单调量。

若，则如果所有的饼干开始时都在处，初始为，由于递减所以则不可能。

所以，下证必存在这样的策略： ，

，

所以中较大的数不妨设为，所以当沿着权重增大的方向传递是不变，最后到无法传递是，否则.



1. Peter有3个银行账户，每个账户里都有整数的钱，他只被允许将某一数量的钱从某账户转到另一账户，使得后者账户的钱翻倍，求证：他总能将钱转移到其中两个账户上。问：他是否总能将钱全部转移到一个账户中？

证明：第二问是平凡的，当钱的总数是奇数时，考察最后一步发现，一定不能转到一个账户中。假设三个账户中的钱分别有元，我们去构造一个过程，使得是严格递减的，则三个数必有一个会变成0.

不妨设，，我们目标是把变成，从而最小值变小，因为每一步涉及到将一个数翻倍，考虑的二进制表示，第步，若则从第二个账户转到第1个账户；若则从第三个账户转到第1个账户；每次第一个账户翻倍，最终第二个账户变成.

个人坐成一圈，一共枚硬币被分配给他们，但不必均分。一步操作指的是将一枚硬币在相邻的两人之间传递，找到一个算法使得通过最少的操作次数，所有人的硬币都一样多。

解：将个人编号，并用表示第个人的硬币数，令

考虑

显然当且仅当每个人都有个硬币。选择这个量的理由是因为，在与号人之间传递时，只变化了1，只有被影响了传递一枚硬币，因此比较好控制（除了在第1个人和第号人之间传递）。记

因为，我们总能通过在与号人之间传递硬币使得恰好减少1.，不妨设，取最小的使得，若则直接从传递到即可；否则，即有，是第一个负数，之后找到第一个正数，则，所以我们从m+1传递到m也可以使其递减，因此总能使X递减，即考虑第一个非零整数即可，则必然成立否则直接就是最终状态了

由于X的递减，没考虑第1个人和第号人之间传递的可能，接下来考虑能够在第1个人和第号人之间传递的情况，我们可以构造算法为：只要能通过在第1个人和第号人之间传递来减小则优先实行这样的操作，否则每步至少减少1。（如何证明这样得到的过程是最优的？之后再在第1个人和第号人传递可能减速更快？这个算法有问题，Aops上有反例，APMO1997,Problem 5）

1. 六边形每个顶点上写一个非负整数，其和为2003，某人可以进行如下操作：可以将某个顶点上的数去掉，用相邻两数差的绝对值代替，求证：必有一系列操作使得所有顶点上的值都为0.

证明：

我们考察六个顶点的最大值，我们构造一个算法，使得最大值严格递减，

分两个子算法：

1. 将奇数和的六个数变成只有一个奇数；
2. 将奇数和且只有一个数是奇数的情形，变成最大值递减，且和依然保持是奇数。

前者不妨设是奇数，分两种情况讨论，只有是奇数；都是奇数。

后者分两种情况，最大数是偶数，以及最大数是奇数，其中最大数为奇数时，分两个子情况，即或这两个情形，若，则操作顺序是即可。

1. 将一些卡片放置在顶点和上，其中，我们能进行如下两种操作：
2. 如果顶点上放置了大于两张卡片，则可以拿走其中三张，分别放置到上（）；
3. 如果放置了至少张卡片，则可拿走其中张，分别放置到上；

求证：若总共有至少张卡片，则可以进行有限步操作使得每个顶点上都至少有张卡片。

证明：不断用操作1，则可保证每个顶点的卡数是0，1，2三种情况，也即1，2，3三种情况，我们要让顶点卡纸数尽量平均，假设此时所有顶点中1的个数为x，2的个数为y，3的个数为z，则，若，

此时O点的卡数至少，再不断用操作2即可。

若，只要经过一系列操作使得每两个3之间有一个1即可划归到上述情形。若3的是连续的，如则可用操作1变为从而保证没有连续的3；若两个3之间全是2，，则可化为，反复操作，必能保证任何两个3之间有至少一个1，得证。

1. 六个盒子排成一排，每个盒子初始时只有一个硬币，有以下两种可行的操作：
2. 若（其中）含有至少一个硬币，则在中移除一个硬币，并在中放入两个硬币；
3. 若（其中）含有至少一个硬币，则可以移除中一个硬币，并将和中装的硬币数量交换。

是否存在一个有限的操作序列，使得5个盒子变空，同时含有恰好个硬币？

解：是的

记，只要达到，其余都是0的状态即可。

算法1：可以将变成



算法2：可以将变成，其中是层的幂塔，即

对k用归纳法说明

时，显然；

假设，

则

所以

接着

下证：，只要证，即证，

只要证，只要证，即证，显然。

所以可以反复使用操作2）使得

1. 一次数学竞赛中，某些参赛者是朋友（朋友关系是双向的）；如果一组参塞者两两之间都是朋友则称这组参赛者是一个团体，一个团体的总人数称为团体的规模。已知规模最大的团体，规模是一个偶数，求证：所有参赛者可以被分配到两间房间，使得其中一间房间内最大规模的团体与另一间内最大规模的团体规模相同。

证明：假设最大团体满足，用,表示某个时刻两个房间中最大团体的规模，首先我们让的所有人去房间A，其余人去房间B，所以，接着我们每次让A中一个成员去B中，直到成立，此时我们也有，否则B中的M成员个数就会比A大，矛盾。

如果我们就已经完成了，否则，考虑的情形，假设，记此时的为，此时如果在B中有一个参赛者属于M但不属于B中最大的团体，则将其放入房间A，即得。因此假设B中没有这种成员，则更进一步包含在B的每个员团体中，但是我们知道，所以每个B中的k+1员团体必有一个成员不是M的成员，我们每次选择让其中某个团体中一个不属于M的成员（记为）放到A中，此时保持不变，否则与的是朋友，又与都是朋友，这与M是最大的团体矛盾；类似地，依次取出，最终时停止。任意一个与中的成员不全认识，若此时说明，中的部分成员（记作P），中的部分成员（记作Q），使得组成了超过k员的团体，而中恰好有个成员，其与可以组成超过2m员的团体，这与M的最大性矛盾。得证。

证法2：让M的成员全去A，其余全去B，之后一一将A的成员调去B，称为一个调配。

然后追踪B中的全部团体，不同团体可以有相同元素，并且除了初始时的团体，在B中还需追踪一个“空团体”，用来容纳初始时还不存在的团体（M的子集)。

对于B中的每一个团体，在任意的调配顺序下，一定存在某个团体以及一个调配顺序，使得等式成立且调配的人数最少（最快），显然最快时的操作步数不超过m，其一定存在，因为空团体在m步下一定可以满足这个等式。此时可以说明，即如果此时B中有更大的团体，会与操作步数最小性矛盾，例如，而，所以在这个调配之前的某一刻会满足，若则与的最小性矛盾；如果，则此时可在A中选择一个元素加到B中且不改变，否则A和会组成比M更大的团体，矛盾，此时，但是怎么保证不增？？（施方彦）

练习

1. 某一天你有有个想参加的活动，称为，假设活动从时刻开始，到结束，只允许参加时间不冲突的活动，试找使得参加活动尽量多的算法（多项式复杂度）。

解：贪心算法，把进行排序，可以证明每次取结束最早的可行解是最优的。

1. 问题1的推广：对活动赋权，目标使得总的权重最大化。

解：动态规划，记为，为中权重最大的兼容组，记

假设中有，则

所以

问题数量，每个子问题有个选择，所以复杂度.

1. 实数写在的表格中，允许同时将一行（或一列）的所有元素变成自身的相反数，求证：经过一系列操作，可使任意一行、任意一列的元素和都是非负数。

解：每次都挑一个总和为负数的行或列做相反数操作，去证明这个过程必然有限，因为所有可能的和为负数的组合只有有限种，所以存在一个上界，每次操作，都会使得所有数总和变大一个有下界的量，而显然总和不肯能无限增大，因为即使所有数都变正数总和还是有限的。

1. 给定平面中个点，任三点不共线，求证：可以将其配对，使得两两连线后所得的条线段均不相交。

解：找到最外侧的一边，即除该两点外，其余点都在这条直线的一侧，然后递归即可。

1. 正边形（）的所有边和对角线用蓝色和绿色来染，一次操作指的是选定一个顶点，并把与其直接相连的线段的颜色反转，求证：无论初始情形如何，都可以经过一些列操作使得与每个顶点相连的线段中蓝色线段的数量是偶数，并说明最终状态是由初始状态唯一决定的。

解：对于是偶数的情形，显然存在反例（例如：每次操作所有点的蓝色度数都改变奇偶性，只要构造初始不是全偶或全奇的情形即可），而且每次操作都会改变所有点的奇偶性，即使存在一个操作，也可能最终状态是不唯一的（例如全蓝的四边形，可以通过操作一对顶点得到另一个符合条件的图形）。

所以下面只考虑是奇数的情形，

1. 首先观察到操作顺序是无关紧要的
2. 没有必要对一个顶点操作两次（等于没操作）
3. 蓝度为奇数的顶点必有偶数个（否则总度数为奇数）

只要成对地操作“坏的”点即可，例如X,Y，操作X改变所有点的奇偶性除了X，再操作Y改变所有点的奇偶性除了Y，这样两步以后其余点都没变，只有X、Y的奇偶性变了。由（3）存在性得证。

下证唯一：假设初始时第i个点的蓝度数为，最终的蓝度数为，即有，由（2）每个点至多调一次，若第i个点被调过，则记，否则为0. 所以

即有，所以若则该点需操作1次，若则该点不需要操作，由（1）操作的顺序是没关系，所以任何两个合理的操作序列都得到相同的结果。

得证

1. 给定一个的排列，我们可以将相邻的两段连续的数交换，例如：可以变换成，求将变换成所需的最少步数。

解：容易构造次，如何证明最小性，但这不是最小的。

首先我们构造单调量，称序列中一个相邻的对是好的，如果，所以初始时0个好的对，最后时个好的对。先证明第一次（以及最后一次）至多可以增加一个好的对，假设中交换与，变成因为初始时全逆序，所以只有可能增加了这一对好的对；之后每次至多只可能增加2对好的对，否则假设变成增加了3个好的对，说明不是好的对，而都是好的对，即且，这是矛盾的，，所以至少要操作.

（注：其他单调量如考察“连续的递增段”数量，也是类似的，初始时有段，第一步减少1段，之后每步至多减少2段，最后一步也减少1段。）

下面再构造次操作，对于时，第一步交换和得，再逐一将放置到应该出现得位置即可，

例如

若则考虑交换次可得，再交换一次即可，得证。

1. 个工作，分别需要时间来完成，有个一样的机器，按照设定的顺序同步完成工作，目标是完成工作时间最短。如果我们的算法是随机决定操作顺序，我们记为我们的算法给出的方案所需要完成工作的时间，记为最优的顺序下所需的时间，试说明

证明：要控制的下界，我们有以下两个观察：

1）；2）

考察在算法A下，最后一个完成的机器，其最后一个工作记为，其开始时刻记为，所以在时刻之前，所有机器都没有停止过运行。所以由1）

，得证。

1. 在一个正五边形中，每个顶点写上一个整数，一个游戏如下进行：每一步可以选择一个整数以及两个相邻的顶点，这两个顶点分别减去，并在他们对角的顶点上加上，如果某个顶点被写为2011且其余顶点都写着0，则我们称这个顶点赢了，试证明：游戏中只可能有一个顶点能赢。

解：不变量，而所以若能赢，则唯一。

充分性：例如则赢的只可能是，但反之，需满足

才能充分保证有一个过程使其赢，

首先观察到操作的顺序是没影响的，可以将操作分解为每次在一个位置+2和两个位置-1，

则 有整数解。

即解

五个方程线性相关，后四个加起来是第一个，只要解后4个方程，

解得：



只要保证



其中



观察到这个量是一个不变量

而，所以充分性保证。

注：不变量的出发点可能是从多项式里来的，即考虑

，操作即是加上如下五种多项式

，目标是达到形如，

我们观察到其都是多项式的倍式，将代入，都是5的倍数，所以有

将因式分解可得因式

，

即证可以由上面五个式子整系数线性组合而成。

先说明：将代入在的意义下是不变量。

若则，其中是上述五个式子中的一个，而，得证。

其实这个量就是



代入得，这就是上面这个不变量的一个多项式解释。

注意到代入，所以若存在这样的则必唯一。

一定存在使得在代入后是的，因为代入是可以取遍0,1,2,3,4的，

而，所以只要取使得即可。

下证，对于这个唯一取定的，可以由

的整系数线性组合而成

1. 令表示的子集，每个子集有一个相应的开销。我们有如下信息，最小覆盖集合问题要我们选择中的某些集合，使其并集为，且总的开销是最小的，例如且，则最优的选择是.

考虑如下贪心算法：每一步我们选择使得最大化，其中表示此时还没有被覆盖的元素，直观上这个算法每一步都最大化了”增加的好处/开销“，这个算法并不产生最有解，但是其与最优解会很接近：令表示被选择的集合的开销，而表示最优解的开销，求证：，其中，也就是说这是一个近似算法。

证明：假设最优算法中某步取了集合，而这个元素在贪心法中不妨假设是按照的先后顺序被覆盖的，则在贪心法中首次覆盖之前，中至少个元素还未被覆盖过，若此时取集合来覆盖，则，其中为集合的开销，而贪心法在此时选择的集合覆盖，即，所以

我们将称作元素的“平均开销“；

假设贪心法得到的子集列为，所以

而这个和式中，每个元素仅被计算了一次”平均开销“，另一方面



上式左端中，因为opt也是一个覆盖，所以每个元素至少被计算过一次”平均开销“。

所以有，即得证。

1. 一个“拟阵”是一个对满足以下条件：（1）是一个有限集；（2）是一族的子集，且满足若，则的所有子集也在中，中的成员称为“独立集”；（3）若且，则存在使得

例如：容易验证上述3个条件成立。容易看出对于，若由的全体元子集构成，则是一个拟阵。

一个独立集被称为“极大的”，若不存在，使得（即加入任何元素都会破坏其独立性），求证：所有的独立集元素个数一样多。

证明：任取两个极大的独立集，假设，则由（3）存在使得，这与的极大性矛盾。得证。

1. 考虑一个拟阵，其中，假设元素有权重定义集合的权重为其全体元素的权重的和，用贪心法找到拟阵中权重最大的独立集：从空集开始，每一步加入一个元素，选择的元素权重最大且保持独立性，当没有元素可以被加入时停止，试说明上述贪心法确实生成了权重最大的独立集。

证明：我们称极大的独立集为一个基。

可以将权重由大到小排列，不妨设，贪心法即从空集开始，从左到右，依次选择保持集合独立性的元素加入集合之中，最终得到集合.假设在审视完元素后，我们得到的集合为，只要用归纳法证明：对于每一个，都存在一个保持集合独立性的权重最大的基为，即，且中；且是一列不变的集合即可。此时即得证。

对于归纳基础，存在，基础显然；假设已经取好存在，若，即贪心法没有选择元素，则，由于贪心法要求选择保持独立性的元素，所以即有，则有，否则，由拟阵性质（2）知矛盾，所以存在满足条件的且.

若，即贪心法选择了，若，则存在且；若，则可对和利用拟阵性质（3）进行操作，在中添加的元素，直到扩充成一个基，所以，且，即存在使得，这是矛盾的，因为此时可以取代称为满足条件的且权重更大的基，得证。

1. 一个疯狂的物理学家发现了一种新型粒子imon，一对imon可能会发生纠缠现象，且一个imon可在多个纠缠的关系对中，物理学家发现了可以进行以下两种操作：
2. 若某个imon与奇数个imon产生纠缠对，则可将这个imon消灭。
3. 任何时候，可以将全体imon复制一份，若原先与纠缠，则它们的拷贝与也纠缠，且每一个与其拷贝也发生纠缠；其余没有纠缠新增或消失。

求证：有限步操作后，没有任何一对imon纠缠。

证明：把imon看作点，纠缠看作边，形成一张图，我们称一个集合为独立集，若集合中任两元素不相连，每一次我们用操作（1）删奇数度的点，删到不能删为止，得到一个每个点都是偶数度的图，再将这个图用操作（2）复制。我们证明这个过程是有限的。假设第一次得到每点都是偶数度的图时，一共个点，则可以将这个点的集合进行一个划分，划分为，即每个集合中都是单点集，因此每个集合都是独立集。我们将这个集合各染一种颜色，用数字表示，一共种颜色，操作（2）结束后，我们得到新的个集合，我们分别将之前的个集合记为，新的个集合记为，则我们将赋予颜色，并删掉，此时颜色至少少了一种，且每种颜色的内的点都形成独立集，所以颜色数减少1。

反复操作，每次都能保证形成了独立集，所以颜色一直递减到1，此时，只有一个独立集，每个点都没有边，即无纠缠关系，得证。

1. 是一个正整数，一圈有个点，我们在每个点上放上一个圆盘，圆盘都是一面白色一面黑色。我们可以进行如下操作：选择一个黑色圆盘，翻转与它相邻的两个圆盘，找到所有初始状态，使得能够达到只有一个圆盘是白色的情形。

解：通过试一些较小的例子，我们发现当且仅当白色的圆盘是奇数个，满足条件。

首先，当白色圆盘个数是偶数的情形，可以找由白色圆盘个数的奇偶性不变，若白色圆盘个数是偶数，可知无法达到只有一个白色圆盘，导出矛盾；

其次而当白色圆盘是奇数时，可将个位置编号为并赋权，第个位置赋权，其中；或赋权，其中，我们记白色盘子所占据的位子的权重总和为，我们可以通过操作将缩小，也可以通过操作来缩小。我们从第这两个位置出发，可使最终所有的白盘连在一起（若白球不相连，则可接着用两种操作，使进一步减小）。得到奇数个白盘连在一起，剩余奇数个黑盘也连在一起的情形。例如两个白盘中间是所有黑盘，此时可逐次对黑盘从左到右进行操作，每次等价与将左侧的右移两个位置，由于有奇数个，所以一定能达到最右边三个是的状态，此时可对中间的操作一次，使得白盘的总数减少两个，且白盘依然是连在一起的，类似地递归下去即可。

进一步，可以思考本问题若总的圆盘个数为奇数的情形，有哪些初始状况可以得到满足，这个尚未找到很好的充要条件。

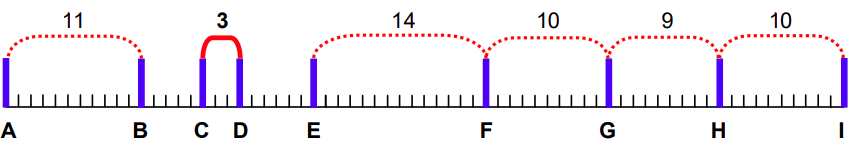
1. 给定个整数和另外个整数使得对于任意有，且从集合中选择个不同的整数，因此总共选出个整数（可以有重复）。假设种数被选了，次数分别是，定义我们获得的分数为，求一个有效的算法使得选出的数得分最小。

解：因为，所以，因此只要使最小化，由于，等号当且仅当，这不一定能达到，比如最大数的次数就无法达到很大，且因为，所以直观来说，要让取的数的种数尽量多，且被取的次数尽量分散（用调整法说明越分散，所求越小）。构造如下算法，先将排序，不妨设，记，我们构造这样的算法：对于，我们看有多少个集合还没被取的数中含有大于等于的元素，在这些集合中依次取元素，若所取的次数达到次时，再取比其小的数，直到次数都达到时，再从大到小一个一个数选即可。(IOI2007)

1. 给定一个元正实数集以及一个正整数，提供一个算法来形成对数使得个数是中不同的数，且最小。提示：一个自然的贪心算法为每次形成距离最近的一对，但这并不总是对的，试分析这种情况下怎么调整。

解：显然，不能有选出的区间是互相包含的。区间也不能跨过一些孤立的点。

仍然不能直接用贪心法，例如



我们用贪心法选出，，不如选和。若用贪心法选出则自动忽略选和的可能性，所以我们可以用一个虚拟的区间来继续用贪心法。这样如果选择了，就是把去掉，用取代。

下证，这样用贪心法所得到的是最优解。对用归纳法：

假设是最短边（如图），若最优方案中无中任何一边，则可将最优方案中任何一边替换成则总长度减少，矛盾；若最优方案中有，没有，则将替换成会更优，矛盾；同样，没有有，也矛盾；所以最优方案中有，或者有。则可用归纳假设说明贪心法得到的是最优的结果。

1. 一叠牌一共张，分别标有数字每种数字的牌各张。开始时，堆牌，每堆张，正面朝下放置，可以看着牌选择顺序，在第一堆牌中翻出一张，正面朝上置于这堆牌底，在这张牌的点数对应的牌堆中，继续如上操作，直到达到所有牌都正面朝上，则获得胜利，怎么样的初始分布可以保证获胜。

解：转化为有向图的问题，将堆牌看作是点图，若第堆有号牌，则连一条从点指向点的边。若第堆有号牌，则直接删去这张牌，不影响结果。

称一个有向图是shifu的，若

1）对于每一个点，；

2）对于每一个点，不存在自己指向自己的边。

称有向图数可约的，如果顶点可以分解成两个子集使得对于任意，与不通（没有边）。

反之称一个有向图不可约。显然，有向图不可约当且仅当无向图连通。

获胜的条件即为不重复地遍历所有边，由欧拉圈引理即得。

欧拉圈引理：有向图中称一个遍历所有边且每个边仅被访问一次的圈为欧拉圈，对于一个shifu的图，存在欧拉圈当且仅当图是不可约的。

证明：存在欧拉圈推出图是不可约的是显然的；反之，

用归纳法证明：时，显然；假设时命题成立，对于的情形，假设其中一点，有与其相连的有向边，则删掉这两边，用取代，则此时依然是一个shifu的有向图，且，由归纳假设存在欧拉圈，从而中有欧拉圈

得证。

1. 100人来自25个国家，每个国家4人，坐成一圈，求证：可以将他们分成4组，使得没有人两个同一国家的人或是相邻的人被分到了同一个组。

解：这个问题出自俄罗斯05奥林匹克，有一个前一问，我们证明之作为引理：若100人来自50个国家，每个国家2人，坐成一圈，求证：可以将他们分成2组，使得没有人两个同一国家的人或是相邻的三人被分到了同一个组。

引理证明：假设100人顺时针坐一圈，编号分别为，我们将其划分成50对，，若两人来自同一国家则连一条红线，若两人在一个划分的对中，则连一条蓝线，我们可以找一个红蓝相间的圈，将其中间隔的一半人分入第一组，另一半人分入第二组。去掉这个圈，再找下一个圈，如此，可得任何两个连着红线的人不在同一组，任何两个连着蓝线的人不在同一组（相邻三人中至多两人在同一组）。引理得证。

命题的证明：对于全部的四个来自同一国家的人，例如分成两个国家，将两人视作一个国家，将视作另一国家，从而由引理存在划分两组各50人，使相邻三人不在同一组，且（后来的）同一国家的两人不在同一组。我们考察其中的一个组，分别在这个组内连两种线，若两人相邻我们连一条蓝线，若两人来自（原先的）同一国家，连一条红线，所以每个点连至多一度蓝线、一度红线，类似引理的证明作，可以将这个组分成两个部分，使得每部分内部既不含蓝线也不含红线。每个组都被分成两部分，所得的四个部分即满足条件。

1. 一个秩为的阿兹特克钻石是一个由格点坐标系中在内部的所有小正方形组成，对于任意一个用多米诺骨牌（的矩形骨牌）覆盖阿兹特克钻石的方法，一次操作是选定一个由两块骨牌覆盖的区域，并将其整体旋转90度，目标是将初始的覆盖变成只有水平方向的骨牌的覆盖，证明：可以在步内完成操作。

（对一半的图形使用归纳法证明，只要一半能调好，全部都能调好。谭蔚宇）

证明：

阿兹特克钻石形状如图1所示，从上往下共有2n行，从左往右共有2n列。

用表示为四个顶点构成的小正方形，

即小正方形中心。

（n=2）

图1

**引理1**：若前行均被横向覆盖，则剩下行也均被横向覆盖。

下面归纳证明：

时，显然。

假设引理对成立，

考虑，由于其上方已经被覆盖，下方为边界，那么覆盖它的骨牌只能是横向的，即覆盖与。

再考虑，其上方已经被覆盖，下方为边界，覆盖它的骨牌只能是横向的，即覆盖与，依次取。

剩下未覆盖的部分恰好是引理中的情况，因此由归纳假设，引理对任意正整数成立。

引理1得证。

**引理2**：若前行均被横向覆盖，则可用至多步操作将前行均变为被横向覆盖。

对于引理，归纳证明：

事实上，第1行显然至多用1步便可确保它是横向覆盖的，因此时引理成立。

假设引理对成立，考虑第行，

（i）若最左边或最右边的小正方形被横向覆盖。

不妨设最左边的小正方形被横向覆盖，

即存在一个骨牌覆盖与，

那么这个骨牌右边即是引理中的情况，至多步操作完成，引理成立。

（ii）若最左，右两边的小正方形被骨牌1竖向覆盖。

接下来反证：**假设此时引理不成立**。

那么被骨牌2横向覆盖（右侧的情况对称）

（否则它被骨牌2竖向覆盖，那么对骨牌1,2进行1次操作，回到了情况（i），共至多步完成，与反证矛盾）

那么被骨牌3竖向覆盖（右侧的情况对称）

（否则它被骨牌3横向覆盖，那么对骨牌2,3进行1次操作，再对骨牌1,2进行操作，回到了情况（i），共至多步完成，与反证矛盾）

类似地，可以得到：骨牌均按图2方式排列。（左右对称）

**第k行**

**第k+1行**

**第2k行**

**第2k+1行**

**第2k+2行**

图2

按之前的顺序标记骨牌，图中第2k+2行右边的骨牌记为骨牌2k+2，那么依次对骨牌(2k+2,2k+1),(2k+1,2k),……，(2,1)操作，回到（i），共至多步完成，与反证矛盾！故引理2得证。

回到原题：

依次将前行横向覆盖，

由引理2，至多需要步即可完成。

再由引理1，此时剩下行也被横向覆盖。

于是在步内将初始的覆盖变成了只有水平方向的骨牌的覆盖，原题得证。

第二章、算法（第2部分）

数学归纳法

1. 有个盒子排成一排，将个球分入盒中（不必等分），若中至少有一个球，则可将一个球从移至；若中至少有一个球，则可将一个球从移至；对于，若中至少有两个球，可以取走其中两个球，将一个放在中，另一个放在中，求证：无论初始状态如何，都可以将所有盒子变为恰好含有一个球。

证明：我们用归纳法和单调量，的情形是平凡的；假设对于个盒子和球的情形有一个算法，我们分两步构造：第一步将一个球转移至；第二步运用归纳假设。

第一步：若有至少一个球，则进行第二步；否则，所有个球都在前个盒子中，给盒子赋权重，尽可能地移动中的球，因为总的权重是递增的正整数，且有上界，所以这个过程不能无限进行下去，有限步后终止，且最终状态只能是中0个球，每个盒子中至多一个球，因此，中至少有两个球，现在进行第二步。

第二步：如果中有个球，将其中个球移至，现在中恰好一个球，其余个盒子中有总共个球，我们对其使用归纳假设中的算法，唯一的困难在于当需要对进行操作时，在算法中只要有一个球就可以进行操作，但此时中至少要有两个球才能操作，我们容易对其进行改进，但凡让我们移动中的一个球到时，我们可以先将一个中的唯一的球移动到，再将中的一个球移动到，同时将中的一个球移回到，来替代将中的这一操作，在此操作下，始终保持只有一个球。得证。

1. 一幢房子里总共有偶数盏灯，每间房间中至少3盏，每个灯都恰好和另外一个灯共用一个开关，且两者不一定在同一个房间，每次开关都同时改变两盏灯的状态，求证：对于任意初始状态，有一系列的操作，使得最终每间房间中都既有开着的灯又有关着的灯。

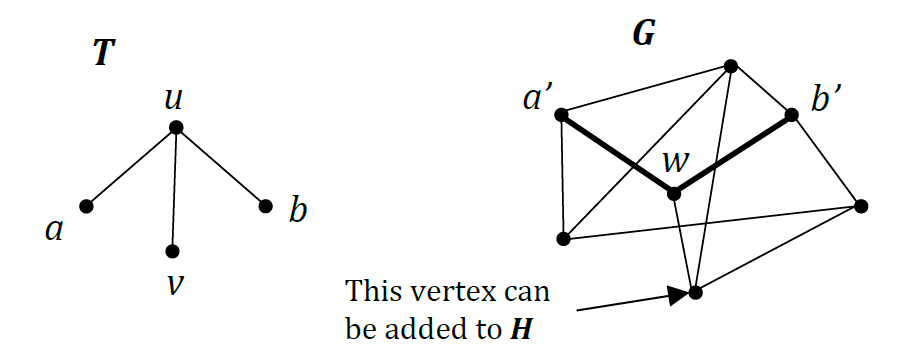
证明：称一个房间是坏的，如果其中的灯全部在同一状态，我们目标是使所有房间变成好的。若有间房间坏的，我们证明存在有限步操作，使得间房间坏的，从而递归证明命题成立。

我们称两灯相连，若其有共同的开关。任取一个坏的房间，拨动开关，若其与同房间的另一灯相连，由于每间房至少3盏灯，则经此操作，房间变成好房间。

若此灯与另一房间的一灯相连，则经此操作，变成好的，而可能由好变坏，接着对进行上述操作，若某部可以停止则得证。反之由于房间有限，我们必定会访问到一个房间在之前已经访问过了，即有（找到最先出现的一对重复访问的房间），则最后一步可以停止，因为最后一步只改变了中一盏灯，若此后变成坏的，说明除了这盏灯其余灯状态相同，说明当访问到后这盏灯和其余灯的状态相同，否则访问到过程即会停止，访问完之后这盏灯和其余灯的状态不同，说明这盏灯与中的灯是相连的，而在访问后我们改变了这盏灯的状态，而这时矛盾的，而这盏灯又与中的灯相连，这是矛盾的，只能与一盏灯相连。得证。

1. 给出一张图，其中每点的度数至少为，且任给出一个个顶点的树，求证存在一个的个顶点的子图，与同构。

证明：假设命题对成立，下面证对成立，对于一个个顶点的树，我们删掉其一个叶子节点（只有一度），由归纳假设，有一个子图与同构，取的根节点，记在中对应的点为，则与相连的顶点（至少个）中至多有个在中，所以至少有一个点与相连且不在中，我们令其为的对应点即可。



1. 是一个2002元集，是一个整数且.求证：存在一种将的每一个子集赋予一种颜色（黑或白）的染色方法，使得：

a)两个白色子集的并是白色子集；

b)两个黑色子集的并是黑色子集；

c)有恰好个白色子集。

证明：对的元素个数做归纳，即是一个元集，.

时显然；

假设时命题成立；时，若，对于中不含第个元素的子集按照归纳假设保证的方案染色，对于中含有第个元素的子集全部染黑，显然该染色方法成立。

若，则，只要互换黑色和白色的地位即可。

信息、效率和递归

1. （归并排序）给定个实数，我们对其进行排序（非减顺序），要求使用最少的比较次数（一次比较即判断），显然我们可以通过比较次进行排序，能进一步优化吗？

解：我们用递归算法，假设是对个数排序所需要的比较次数，将元集分解成两个规模为的集合（或者当是奇数时，分解为规模和的集合，为了方便我们假设是偶数），我们分别对两组数进行排序，需要次排序，将得到的两列非减数列和合成，只需要用两个指针比较不超过次即可，所以.我们可以证明，所以需要比较的次数是阶的，比平凡的上界要更有效率，是阶的。

1. 假设有盏灯和个开关，但我们不知道哪个开关控制哪个灯，一次操作我们可以取任意一些开关，同时将其打开，然后观察哪些灯被打开了，若想要确定开关和灯的对应关系，显然每次开一个开关通过次操作我们可以得到全部的对应关系，能进一步优化吗？

解：我们只需要次操作即可；

解法1：类似例5，每次分成两堆，，但是因为我们可以事先区分两堆，所以我们可以同时操作两堆（每次取两堆中的子集的并集），得，然后用归纳法证明

解法2：与解法1等价，但想法不同，不需要用到归纳思想，事先将所有灯二进制标号，每次打开某个位置标号为1的灯，则只需要次即可区分所有灯。

这里算法的时间复杂度低，但是需要的存储空间大。

1. 卡片从1到编号，将其按随机顺序排成一列，其中.每一步操作可以取任意一叠连续的卡片其卡片的编号是递增或递减的顺序，然后将其顺序颠倒，例如对于，原来的排列顺序为，可以选择将其颠倒，形成.求证：我们可以用至多步操作，将所有卡片编号调整为递增或者递减。

证明：用递归思想，假设对于规模为的问题，我们可以用至多步操作，对于规模为的问题，若编号是以数字开头，那么我们可以用至多步将其变为或者，无论那种情况我们可以用两次操作使其全部按顺序或者倒序排列，例如前者，可以变为再变为，即得，且由此过程可知，通过步既可以调整成顺序的，也可以调整成倒序的。

所以要证明结论成立只需要证明即可；

我们发现，所以，事实上，可以发现必须要3次操作；

对于，必可以通过一步使得1或5被调整到两边的位置，然后再用3步将余下的数调整成符合要求的单调数列即可。

注：我们需要一个线性的界，则我们递归时考虑；若我们需要一个对数的界，则我们递归时考虑

1. Tanya选择一个自然数，Sasha试着去猜出这个数，如果她每次可以选择两个数，并询问得到，求证：Sasha最多问7个问题可以确定这个数是几。

证明：，猜想并证明当自然数时至多需要问个问题。

我们的策略是决定这个数的2进制表示，

先问判断是否2的倍数，若是，则问；若否，则问，从而可以判断出其mod4的余数。用归纳法，可知结论成立。

1. 一张桌子上有个盒子， 是一个正偶数，且每个盒子中恰好放一个球。其中有某些球是白球，数量是大于0的正偶数。每一次我们可以指定任意两个盒子，并询问其中是否至少有一个白球（回答为“是”或“否”），求证：可以通过个问题确定出两个放有白球的盒子。

解：问所有的，如果回答有“否”，则说明1不是白球，从而可以回答是的都是白球（条件保证必有2个以上）；

若回答全是“是，说明两种可能（1）1是白球（2）除1外全是白球，1是黑球。

其中第二种情况由于白球数为偶数个，排除。

从而1是白球，之后再问所有的，若回答由“否”则同理，可得2不是白球，从而确定了所有的白球（至少2个以上），若全部为“是”，则两种可能（1）2是白球（2）除2以外都是白球，但情况（2）与条件白球个数为偶数个矛盾，所以2是白球，即得1、2为白球，所以至少两个白球，而总共个问题。

1. 某人A想一个中的自然数X，另一人B来猜，B每次可以指定一个自然数，由A回答是中的哪种情况。求证：至多问次可以确定这个数.
2. 同一个猜数字的游戏，但被允许问任意的答案为“是”或“否”的问题，而被允许在整个过程中说一次谎，显然每个问题问两遍，若其说谎，则问第三遍来确认，总共至多次可确定这个数，那么可否更优？
3. 用二分法即可，个数，每次取正中间的数问，每次规模缩小一半，因此至多次。
4. 可以问X的二进制的每一位表示，那么k个问题可以确定这个数，之后再问A是否说过谎，如回答没有说过谎，则前k个问题全部正确即得到结果；若回答说过谎，则此时A必然已经说过谎了，我们再问A前一个问题是否说谎？若其回答说谎，则用前k个问题全是正确的，我们可以确定X，若其回答没说谎，则前k个问题中有问题说了谎，接着我们再用（a）中的策略，确定前k个问题那个说谎即可，所以一共问了即可，即一般地
5. 假设为一个非负整数，一只蚂蚱沿着实数轴跳，从原点开始向右跳步，每一步的步长为互不相同的正整数，分别为（按任意顺序），假设集合是一个由区间内个不同的正整数构成的集合，其中，求证：蚂蚱可以将其跳跃路线安排到不经过中任何点。

证明：用第二归纳法，当时显然；对于的情形，假设命题对成立， 不妨设，记中的最小元为，根据分两种情况讨论：

1. 若，且若，则第一步选择步长即可，问题转化为归纳假设情形；

若，则考虑对数，这些数对中必有一对，其两个数都不在中，否则每一对中至少含有一个中的元素，总共至少个中的元素，而这些数都不等于且两两不同，这与是一个元集矛盾。所以不妨设中两个数不在中，则可安排第一步步长，第二步步长此时问题化为归纳假设的情形。

1. 若，可以反过来想，从跳到0，根据归纳假设，可以用步跳到，步长分别为，且避免经过中的个点，若恰好也不经过，则左起第一步步长选即可；若经过，例如右起某步之后到达了，则将这一步替换成，可以跳过点，之后按任意顺序向左跳跃即可，因为为最左端的的元素。

练习

1. 车绕着环形跑道行驶，将刚好够跑一圈的汽油分配到环形跑道上的个位置，证明总有一个点，车子以空油箱的状态从这个点出发，可以正好跑完一整圈。

证明：假设第个位置有油量，第个位置到第个位置耗油为，从小到大顺时针排列，因为，记，只需要找一个指标使得对于任意都成立，只需要找的最小值即可，此时有，得证，（其实证明了顺时针逆时针都有相应路线）。

另证，自然会考虑对用归纳法，将所证命题加强为必存在一条顺时针的路线。当时结论显然；假设成立，则当时，假设第个位置有油量，第个位置到第个位置耗油为，从小到大顺时针排列，因为，所以总有一个位置满足，则去掉，用代替原先处的，记新的油站为将合并成。由归纳假设存在一条路径顺时针且长度为的路径为，所以可以得到一条符合条件的长度为路径为，得证。

1. Arutyun和Amayak合作一个如下的魔术：一个观众在板上写下一串长度为的数字，Amayak用一个黑盘覆盖其中连续的两位，之后Arutyun来说出这两位数字以及他们的顺序，请问为使这个魔术总是可行的，最小是多少？

解：

先证，所有的可能的情况记为集合，Amayak最多可以制造出种情况记为集合，若要Amayak的操作即构造一个映射，且必须是一个单射，所以，即.

考虑到若，对于·一种情形，根据

其中，来遮住，

如果是一个奇数，那么容易推断出来；

如果是一个偶数，容易推断出来；

所以可行。

1. 考虑两个人的游戏，其中一人想一个的置换，另一个猜的人的任务是推理出这个置换（已知），每次允许选取置换中三个位置并被告知该三个位置的相对大小，例如对于置换，若猜的人选择位置，则另一人会告诉他第5个位置小于第1个位置小于第4个位置，请问猜的人最少问多少次才能保证置换总能被猜出。

解：改编自俄罗斯2005年数学竞赛level 9第4题，该卷还有一道类似问题level 10第3题，是每次可以问三个指标所对应的数集具体数字（不考虑次序），即，原题至少需要次，若问题次数严格小于，例如总共个问题，记第次问的数是，并记为这个数在所有问题中出现的次数的倒数，则，但是，否则说明其中有两个函数值为1，比如，则无法区分的顺序。所以，矛盾。  
  
下面再构造通用的个问题，只要问其中取遍中的所有奇数，再问一个即可。

理解1：对于这个新问题，即要求一个通用的问题序列，使得无论初始情形如何，都可以确定所有数，即任意两个数之间可以明确大小关系（这个理解是错的，事实上，策略可以是动态的，但这里引出了一个有趣的图论问题）。易得，任意位置都被访问了至少两次，若位置仅被问题问到，则或是是无法区分的。

即问一个点完全图至少用多少个三角形可以覆盖所有边，可以证明下界为，但是否可以构造一致的例子？更一般地可以去问一个点完全图至少用多少个点完全图可以覆盖所有边？也即元集至少用多少个元子集覆盖可以使得任意一对元素可以出现在同一个子集中？这个即经典的Steiner System，本题的例子就是Steiner Triple System.

理解2：策略可以是动态的，比如这样一个算法，在排好了个数的顺序后，加入另一个数，其中，我们可以在原先已经从小到大排好的个数中挑两个数，使得这两个数将其余个数截成三段（），其中每段数不超过个数，而一个问题只要问，就可以确定在哪一段中，在该段中继续递归，所以一共只要个问题，就可以将定位；

设，用表示问题个数，则



.

但怎么证明这是最少的通用的算法？

1. 个国家每个国家有个代表，个满足如下条件的委员会称为一个圈：

i. 每个委员会有个人，其中每个国家一人；

ii. 没有两个委员会的成员完全相同；

iii. 对于，与没有共同的成员，其中表示

iv. 如果，与起码有一个公共成员；

试问是否可能有个委员会来自个国家？

证明：正确。

容易递归构造使得多一个国家时，满足条件的委员会数翻倍，例如个国家的满足条件的委员会，对于个国家，若构造

，，不好将总的委员会数调整小，使其正好达到；

下面构造一个橄榄型的例子



其中两头用和，总共个委员会，所以个国家可以达到个委员会，下面说明在这些委员会中每次可以减少个，即去掉橄榄的一头，将和捏在一起变成，即变成如下形式：

从而减少两个委员会，得证。

1. 一定数量的机器人被放置在一个有限的长方形棋盘上，一个格子可以放任意数量的机器人，格子的每条边都被标注了是否可以通行，一个指令为上、下、左、右其中的一种，所有机器人从同一时刻开始按照同一串特定的命令行动，如果按照命令的方向上可以通行，则穿过边到下一个格子，如果边不可通行，则保持在原来格子，而棋盘四周的边均是不可通行的。假设对于任意一个机器人以及任意一格都存在一串有限的指令使得机器人可以移动到该格，求证：对于一个初始状态，存在一个有限的命令串使得所有机器人同时到达同一格。

证明：先考虑两个机器人的情形，如果两个机器人可以同时到同一格，则将这两个机器人再看成一个整体去追击第三个机器人，从而可以递归。

下面只要说明存在有限的命令串使得机器人Tom可以追上机器人Jerry即可，考虑Tom所在格到Jerry所在格的最短移动距离以及对应的移动路线，若两个按照这个路线的指令走，最短移动距离是不增的，只要说明这个量是严格递减的即可，如果该过程不减，则说明Jerry也是一步都没有停留，即平移了一样的相对位置，这样重复操作几次一定会走到有限的棋盘的边界，从而Jerry必然要停留，得证。

1. 表示所有的三元数对的集合，其中，两人玩下面的游戏：首先在中挑一个三元数对，至少猜几次能确定？其中每次给出一个猜测，回复数字.

解：首先两步不行，两步至多得到种不同的结果，无法区分种状态。

下面构造三步的方法：第一步取，可得，不妨假设，因为如果，则我们之后可以通过问代替问来求得.

情形1：若，第二步问得到，第三步问得到.

情形2：若，第二步问，记结果为.

若，则得到的，

若得到的.，

考察，

即可以通过比较和9来确定第二步所得的具体是什么量，从而

(1)当时，第三个问题问

无论或，都有



从而得到，从而得到.

(2)当时，无论或，都有，第三个问题可以问，无论或，都有且

得到



所以求得，即得。

1. 平面上给定一个有限点集，每个点的坐标都是整数，是否可能将点染成红色、白色，使得每条平行于坐标轴的直线上红点、白点的数量差不超过1？

解：如果点集中有一个“矩形”，即这四个点可以直接去除；如果有三个点形成一个“直角”，即，则可将等效地染为某色（例如红色，这意味着实际上是染成白色、红色、红色）同时可以去掉，如果点集中有一个“矩形”，即这四个点可以直接去除，再考察所有以为等效点的直角，直到消除所有直角，此时图为不存在直角，且有一些染色的图，去除所有染色，重新染这张等效的图即可。

1. 人坐成一圈，其中一些人是诚实的另一些会欺骗，我们不知道谁是诚实的，每个人陈述一下他右边一个人是否是诚实的，诚实的人总是说真话，会欺骗的人可以说谎，我们的任务是找出一个诚实的人，求证：如果会欺骗的人不超过时总能做到。

解：可以将回答看成是一个函数的函数，第人称为，若宣称为诚实的人，则，否则.对于一串回答，可以切分成连续的和连续的，记长度分别是观察到如下两个事实：

1. 如果，则或者是诚实的，或者都是会欺骗的人。
2. 如果，则与中至少有一人是会欺骗的人。

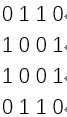
考察最长的的串，不妨设为，我们说明其后一人一定是诚实的，即是诚实的人。反之由（1）得都是会欺骗的人，而对于一段连续的来说，例如，由（2）可得中至少有个会欺骗的人，所以回答的人当中会欺骗的人至少有人，假设，所以，且.则最长的的串长度，所以会欺骗的人至少人，与至多个会欺骗的人矛盾。

1. 在一个正方形棋盘的每一格上放一盏灯，每一次操作可以选定一格，改变这格与其相邻的格的状态（相邻的格即有一条公共边的格），求证无论初始状态如何，总能经过有限步操作使得所有灯都变成关闭状态。

解：

观察到与操作顺序无关，且选择同一格操作两次相当于没操作，因此可以将操作是做一个的方阵，元素，初始状态的开关用表示，即可视为个方程个未知数的方程组一定有解的问题，去找使得行列式值是1，即满秩。

例如，按照如下操作，相当于没操作，所以必不满秩，

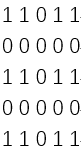




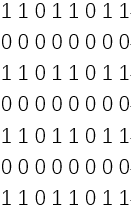
当

构造







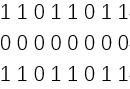
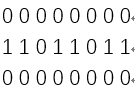


即在右侧添上



…

在下方添上

… 或 …

其余一般情况，还是要计算行列式的奇偶性，关系矩阵记为，记操作为一个列向量，

记最终状态为，则

行列式可以用原始定义展开，每行每列取一个1，这个1对应于棋盘上的一些“有向圈”，他们遍历棋盘，因为正方形二面体群（旋转翻着）是8阶的，所以作用下的轨道元素都是偶数，除了不动的轨道，所以只要考虑不动的轨道数，即旋转翻着下都对称的轨道数，而圈的顺时针和逆时针的对称又是偶数阶的，所以只要考虑所有由长度为1或2的圈遍历的图有多少个（只需考察奇偶性）即可，

对的奇偶性分类，

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|  | T | F | T | F | F | T | T | F | F | F | F | F | T | F | T | T | F | T |
|  | F | T | T | F | F | T | T | T | F | F | F | F | T | T | T | T | F | T |

上述表格可由对称性列出递推得到。

情形，只需考虑正中四格、对角线上都是长度1的圈，那么只需对一个高度的梯形区域考虑覆盖；如果中间左列上有单点，这可以和横穿中间两列的长度2的圈的情形配对，只要考虑，中间左列上没有单点的情形，那么去掉这一列，可以与左半边列的覆盖对应，由对称性，将其转化为对折一半的情形即可，可得(\*)；

对于的情形，考虑中间一列高度的覆盖数为，左半边列的覆盖可由对称性给出，因此，不难归纳证明满足

所以(\*\*)

由(\*)和(\*\*)式，可以递推得一般情况。

1.  是一个圆周，是内不同的点，是圆周上不同的点，且要求都不相交，一个蚱蜢可以从跳到，如果与任意的不交，求证：经过一些列跳跃后，蚱蜢可以从任意的跳到任意的.

证明：直观上感觉去掉这些一维图形后圆内还是连通的，所以可以有一条从到的路径，将该路径“拉直”，会碰到一些园内的点，这就是蚱蜢跳跃的路线。

严格证明须要用归纳法：对于时，命题显然成立。

对于一般的，考虑在圆内的凸包，记作多边形，顶点分别是，如果对于的与的边界仅相交于，则我们只须拿走任意一对即可以用归纳假设。反之存在一些与的边界仅相交于另外的点，记作，因为互相不交，所以互相不交，且不是的顶点，如图易知会有一对使得其间没有另外的.而由于不是的顶点所以之间一定还存在一个顶点，此时与的边界仅相交于，去掉即可用归纳假设。

1. 有红白蓝三种卡排一排，表示红卡张数，表示白卡张数，表示蓝卡张数，每张蓝卡用其右边白卡数计分，每张白卡用其右边红卡数的两倍计分，每张红卡用其右边蓝卡数的三倍计分，例如：红、蓝、白、蓝、红、蓝，总分为分，若将最低得分看成是的函数，求函数以及所有可能的最小计分的排列。

解：直观想猜测同色相邻时考虑函数取到最小，此时至少有一种颜色得分，即或或，因此猜测函数为，下用归纳法证明：考虑第一张颜色可得递推式：



由归纳假设得



下证：

若或结论显然；若则所以，得证。

同理可证

，

所以，而同时容易构造取等的例子，归纳法成立。

下求所有是得分最小的情形：

（1）若,,中有唯一的最小值，比如（,同理），由归纳过程可知，当且仅当取到等号，所以倒推可得所有白卡在所有红卡左面，同时蓝卡在白卡右边，蓝卡在红卡左面，即一整段白卡，一整段蓝卡，一整段红卡只有在此情形取到最小值。

（2）若两个较小的相等，比如，由上述不等式取等条件，第一张卡是白的或蓝的，若是蓝的，去掉第一张后，此后只有唯一的取等情形；如果是白的，则去掉第一张后仍然成立，递归下去，得最小情形是



或者.

情形同理可得。

（3）若，则第一张是任何颜色都可以，比如第一张是白色，则去掉第一张后变成的情形，即和（2）中一致，最小情形是



或者；若第一张是红色或蓝色，类似讨论可得。

1. 假设是满足的整数，求证存在两个的置换和使得对于任意正整数都有.

证明：考虑意义下，如果可以表示的和，则对于只将改变两个位置的也可以表示成某个的和。

假设是这两个发生不同的位置，即，我们构造一列数，满足，则找到最小的指标，满足，如果，则做求和，由，得，由得，从而所以，与最小性矛盾，即由，下面通过将在指标列以及在指标列上分别错位平移，构造满足条件的.

，，其中即是的重排。除了上述指标外，验证除了指标外，都满足，

而都是的排列，所以，即

也成立。

而所有的一定可以从通过依次在一对数上得到，得证。

1. Alternativia国国会有两个党派，每个代表只属于其中一个党派，对于国会中任意两个代表，存在另一个代表认识且仅认识这两个代表中的一个人。总统（不是代表）每天从中选一群人，让他们换党派，同时对于每个认识这群人中的至少一人的其他代表，也要求换党派，求证：总统最终可以保证每个代表都属于同一党派。

解：将代表看成点，认识关系看成边，形成一个点图，为方便起见规定点到自己有边，考虑图的邻接矩阵，是一个对角线元素为的对称矩阵，，题意表述“对于任意两个代表，存在另一个代表认识且仅认识这两个代表中的一个人”即不存在矩阵中两列完全相同。将矩阵第行行向量记作，而选择一群人进行操作，即将加到初始状态对应的向量上（此处是分量上的“或”运算，加法是 “异或”运算），所谓经过一系列操作能全变成同一党派，即将加到初始状态对应的向量上，得到向量.为此，只要说明（其实是等价的）一组基向量中每一个都是可以通过行向量的上述运算表示的即可，其中是只有第个位置是的向量。

需要用到引理：是可以表示的。

考虑出现最多的列，假设一列中出现个，这样的列可以不止一个，指标集记为，下面说明对于，是可以表示的，将第列中是的位置记为，考虑，则的第个位置是，如果中还有其他位置是例如第个位置，则说明矩阵第列也有个，且是这些位置，这与第列是最多的列且没有两列完全相同是矛盾的，所以.接下来假设出现的次数第二多的列，设为第列，这一列出现了个，分别是，令，则行向量的第个位置为，如果还有其他位置是，例如第个位置，则说明第列中的位置全是，如果第列没有其他，则与任何两列不相同矛盾，所以第列还有更多，由是的个数第二多的列，可得，即其中是某些的和，因为每一个都可以表示，所以也可以表示。同理递归可得，基向量都可以表示，得证。

引理证明：可表示。

如果邻接矩阵的满秩，则显然可表示；若的秩为，则不妨设的前行秩为，则存在前个行向量的线性组合使其前个位置都是，只要证其余的位置也是即可。对于行指标，是前行的一个线性组合，则一定是奇数，因为因为由矩阵对称性第列也是前列的一个线性组合，所以.

线性组合中某个行向量的第个位置是中第位置的和，因此的第个位置也是是中第位置的和，而的位置都是，所以的第个位置也是，引理得证。

第三章、过程

介绍：前两章“算法”主要关注的是从初始状态构造一系列的操作以达到要求的最终状态，本章的问题是类似的，关注的不是如何构造一系列步骤，而是分析已知的过程，一些问题要我们确定一个过程是否会终止，如果会终止，那么最终状态看上去是什么样的；令一些问题会要我们限定到达某个特定状态的步数。

我们主要的工具是不变量、极端原理、归纳法以及一些我们要进一步发展的技巧，例如通过变换问题使问题简化但保持结果不变。另需强调，实验、试错、观察、直觉和假设在解决过程问题时有着重要地位（对一般的组合也有效），解决问题的关键思想往往是通过对小的值进行试验得到的。

不变量

1. 有鹅卵石游戏如下：初始时在处有一个鹅卵石，每一次操作，如果位置上有鹅卵石，而上均没有鹅卵石，可以将位置的鹅卵石移除并在位置上分别放上一个鹅卵石。求证：在游戏的任何时刻，一定在某个满足的格点上有鹅卵石。

证明：在每个格点上赋一个权重，显然每次操作不改变总权重，所以总的权重即为1，而，得证。

1. 有个书签，每个都是一面白色另一面黑色，白色朝上排成一排，每一步我们可以选择一个白色朝上的书签（非最外侧的）将其移除并将最近的两个书签翻转，求证：可以达到最终只有两个书签的状态，当且仅当不能被3整除。

证明：如果不能被3整除，容易构造的算法，



WWWWW

B BWW

B W B

W W（WWW）



WWWWWW

B BWWW

B W BW

W WW

B B（WWW）

归纳可得。

下面主要证明能被3整除时，不存在这样一系列的操作：

通过寻找不变量，注意到每次操作不改变黑色书签的奇偶性，接下来我们要找一个在意义下不变的不变量，对于每一个白色书签，若其左侧有个黑色书签，我们赋予其一个标签，令是所有标签的总和，初始情况所有标签均为，所以，而每次操作将不改变的余数，分别对进行验证（由于每次操作不改变B的奇偶性，只跟这三个位置以及之前的位置有关），移除中间的W均不改变这个不变量。

如果只剩两个时，必然是两个同白或者两个同黑（黑色奇偶性不变），所以，得证。

另证1（施方彦）：归纳证明任意时刻，每个W位置的左中右三个位置的序号是各不相同的。

B的左右两个位置是相同的。所以如果最后剩2个，那前一次一定中间是W且3个序号不同余，而两边的序号就是开始时头尾两个的序号，而若能被3整除，说明首尾两个书签标号是同余的，这就矛盾了。

另证2（何欣成 群同态）：构造字母群到三阶对称群的同态：

则四种操作分别对应



即

所以四种操作下，同态像不变，若，则初始像为，最终无论都不可能。

1. 在的棋盘上玩一种游戏，所有格子中都放置一个标记，一个标记有两面，一面黑色一面白色，除了一个角上的一格黑色朝上，其余所有都白色朝上，允许的操作是选择一个黑色朝上的标记，拿走这个标记并将与其公用一边的标记全部翻面，试求所有的棋盘规模使得游戏中可以将所有标记全部拿走。

解：通过将角落黑格所在行（列）的操作，可将这行（列）逐一操作，则其后一行（列）全部变成黑色，如果列数（行数）是奇数，则可逐一将这一行（列）黑子全部拿走，且再后一行（列）全部变成黑色。由此可知如果列数或行数是奇数则可全部取走。如果行数列数都是偶数，则构造不变量，其中是总的边数（相邻的子连一条边），是白子个数，每次操作将黑子去掉并去掉其连的边，则可验证保持奇偶性不变，从而计算得此情形不能全部去除标记。

好对象和坏对象

1. 圆周上有盏灯，每一天某些灯根据下面的规则改变状态（开或关）：在第天，如果一盏灯与其相邻的至少一盏灯状态相同，则其在第二天不改变状态，如果一盏灯和其相邻的灯状态都不同，则第二天其改变状态。求证：无论初始情形如何，从某一天开始所有灯的状态都将保持不变。

证明：称一盏灯是“好的”如果其相邻的灯中有与其状态相同的灯，因为若两盏相邻的灯状态相同，此后他们将永远不改变状态，所以“好的”灯总数非减，下面我们去证明“好的”灯是严格增的，直到全部变成好的灯。因为初始时，是奇数，其中必有两盏相邻的灯状态相同，所以必有好的灯，若此时存在坏的灯，则必存在两盏相邻的灯分别一好一坏，所以状态必不相同（否则都好），下一步不变改变，导致状态相同，从而变成好的，说明好灯数量严格增加，除非所有灯变成好灯，得证。

步数的界

考虑限定总步数的界的问题时，总是考虑涉及某个特定对象所涉及在一次行动中的步数。

1. 圆周上站着个学生，每个人面向圆周的顺时针，他们的身高为，若某个身高为的学生站在身高为或更矮的人的正后方，这两个人允许交换位置，求证：在达到没有人可以换位子的状态之前，不会发生超过至多位置交换。

证明：考虑为身高的人在达到无人可换之前与更矮的人交换位置的次数，所以，考虑身高的人沿着顺时针与身高的人之间的比他们矮的人数，任何时候至多是，或与高的人交换位置时不改变，与矮的人交换时减小，与矮的人交换时增加，所有人都不可交换时必站在正后方（否则与或者有比高的或者有比矮的，必定存在可以换的人），所以对于来说，他需要比多交换个人，所以个矮的人交换，所以，而一次交换仅被一个对象记了一次“和更矮的人交换”，所以总的交换次数为.

1. 一个书架有本书，标号为按某种顺序排列，图书管理员想根据下面方式将书按正确顺序排成，每次选择一本太靠右的书（位置比其应该在的位置右边）假设其标号为，将其放到第个位置，求证：无论怎么操作，都可以在少于步后达到正确顺序。

证明：观察到号书无法被选，号书至多被选次，号书至多被选次（一次可以到其应该在的位置，之后可能因为号换位置还需要再换一次号书），假设号书被选择了次，其中，则可知，这是因为只有在它被往后“推”之后，其才可以再被选。归纳易得，所以总共至多调了次。

注：本题用构造单调量也可以证明。

归纳法

上述例子反应了从个体的角度考虑操作步数的界，用到了归纳、递归的思想，下面的例子同样是以归纳法为核心，但更多考虑的是整体结构为中心思想的归纳：归纳化的证明依赖于棋盘上漂亮的的组合结构。

1. 是一个正整数，的棋盘上每个格子都有一个箭头，指向上下左右其中一个方向，一个小虫在某一格中，每一步小虫沿着箭头走一格，到达相邻的格或者走出棋盘边界，同时其离开的方格中的箭头顺时针旋转，求证小虫能在至多步后一定会离开棋盘边界。

证明：用归纳法，假设成立，时

对棋盘的边界进行分类，边上（非角）的格可分为指外、指内、指邻（后内）、指邻（后外），四类，各有格，，角上格可分为指外、指邻（后邻）、指邻（后外）分别为格，.

则步数

上式第一部分为经过的指邻（后内）的步数，第二部分为经过指内并在内部最多移动的步数，第三部分为经过的指邻（后外）的步数，最后多加一次是因为初始时可以在内部，

所以

，得证。

1. 一个的棋盘上（）在一条对角线上标“”，恰好个“”，其余格都标“”，每一步可以选择某一行或者某一列，将其全部变号，求证，状态不可能达到“”的个数比少。

解：不妨设初始时主对角线上全是“”，观察到“操作”不用考虑顺序（可交换），且对某行（或某列）操作两次相当于没操作，用归纳法，若第行或第列中若有至少一个“”则对右下角的棋盘用归纳假设即可；反之若第行和第列中都没有“”，则第行或第列必有一个被操作过了，否则为“”，不妨设第行被操作了，第列没被操作，而第行中除了第个位置又全是“”，说明第列到第列都被操作过，而第列其余位置都是“”，说明其第行到第行都没有被操作，那么此时右下角棋盘恰好个“”，而当时，所以仍然成立。下面只要证归纳基础的情形即可，而当时结论是不对的。

问题转化：

1. 一根单位长度的棍子上有只蚂蚁，每只朝向左或右，在时刻，所有蚂蚁开始以单位速度朝自己面对的方向移动，如果到达棍子的边界则蚂蚁从棍子上掉落，如果两只蚂蚁相遇则他们同时转身并以同样的速度继续移动，求证：所有蚂蚁会在至多时掉落。

证明：这个问题等价于两只蚂蚁相遇后不被影响继续沿着自己的方向运动，则最多运动时间。

1. 整数到按照一定顺序写在一条直线上，对其进行以下操作，如果第一个数是，则将前个数反向排列，求证：有限步后，第一个数可以变为.

证明：用归纳法：时显然；假设对于命题成立，则观察到如果出现在第一个位置，则下一步将到最后一个位置，且可以忽略数字，问题转化为归纳假设；所以如果第一个位置一直都不是，假设最后一个位置是，那么可以等价为与两个数字对换的情形，因为第一个位置一直都不是（我们假设的），第一个位置也就不可能是，所以和两个数具体是几并不影响这个问题，那么对于和互换位置的情形，我们可以用归纳假设得到有限步后第一个位置是.

注：有以上论证不难得到对于，至多步可以使得第一个位置是，则满足，即如果第一位一直都不是则只需要步就可以完成，所以最多步后到达第一个位置，一步使得其到最后一个位置，再步就可以完成。

1. 一张的棋盘，每格宽度是，其中某些格子的正中心上各有一只蚂蚁（视为质点），从时刻起蚂蚁开始沿着上下左右四个方向以单位速度运动，当两只蚂蚁以相反的速度遇到后，他们都顺时针转继续运动，如果超过两只蚂蚁相遇或者两只蚂蚁以垂直的方向相遇时，他们继续保持原有的方向运动。如果蚂蚁到达棋盘边界则掉落，考虑所有可能初始情形，求出所有蚂蚁最多多少时间一定全部掉落，或者证明这个时刻不一定存在。

解：通过试简单的例子，猜这个数是，这个数可以达到，若初始时只蚂蚁，一只在左下角往上走，一只在左上角往下走。下证是上界，用代表上下左右四个方向。“碰撞”即指反向蚂蚁相遇。

第一步：类似第一个转化，问题可等价转换为蚂蚁只能方向走，或者只能方向走，如果发生后碰撞后变，变；

第二步：在坐标系中，时刻，没有型的蚂蚁在区域中，没有型蚂蚁在区域中；所以如果一次碰撞发生在时刻，则位置一定是在区域中；

第三步：同样的可以将问题等价为型和型蚂蚁，类似第二步可得时刻的碰撞发生在区域；

第四步：对称地，可讨论型蚂蚁，假设最后一次碰撞发生在时刻，发生的位置是，则之后沿着或方向一直运动，由前述讨论可知且，所以得，所以最多时间后会到边界。得证。

注：回过头来思考，放缩的目的是想说明如果蚂蚁经过的徘徊越多，其离边界会越近，从而最后直走会更快地到达边界，使得总时间有限；为了做到这一点，需要蚂蚁的行动更加“有秩序”而不是问题中描述的“混沌”走法，所以需要有第一步这样的转化手段。

总结例子：

1. 1994个女孩坐成一圈，初始时某人被给予个硬币，在一次操作中，每个至少有两个硬币的人给与她相邻的两人各一个硬币。求证：（1）若，游戏会停止；

（2）若，游戏不会结束。

证明：如果其中有一些人传递过无限次硬币，一些人传递过有限次硬币，那么一定存在两个相邻的人，其中一人传递过有限次，另一人传递过无限次，显然不可能。所以或者每人都传递过无限次，或者每人都传递过有限次。

（1）假设每人都传递过无限次，记第个人为，可以认为与之间有一个固定的硬币，只在与之间传递，那么至少有1994个不同的硬币，矛盾。

（2）构造不变量，一个硬币如果在处，赋予权重，所以每次操作，或者总权重不变，或者总权重，所以总权重在下是不变的。不妨设初始时所有硬币在上，此时总权重是，如果游戏结束，说明每个人正好一个硬币，总权重是，矛盾。

1. 个鹅卵石放置成竖直的一列，根据如下规则调整，一个鹅卵石可以被移动，如果它所在的一列比其右边一列多至少2个鹅卵石，且它在一列的最上方（如果右边没有鹅卵石，则视为右边一列是0个鹅卵石，即右边有无限列高度为0的列）。每一步，选择一个可以被移动的鹅卵石，并将其置于其右边一列的最上方。如果没有鹅卵石可以被移动了，那么我们称这个状态为最终状态。对于，求证无论每步怎么选择，最终状态是唯一的，并描述最终状态。

证明：用表示第列的鹅卵石数量，因为左边列一定比右边列鹅卵石多（或相等），显然最终状态一定满足或.

论断：只有至多一个指标满足（因此，其余都是满足的）。

论断证明：若，我们称是坏的，假设有两个坏的指标，，，且对成立，假设状态是最早使得有这种两个坏指标并且中间递减的状态，考察形成状态前的最后一步，由于这是最早使成为坏的指标的情形，所以前一步一定是选择了第或号列进行了操作，无论那种情况，在为操作上一步之前，也有两个坏指标，矛盾。断言得证。

由断言命题易得，以为例，状态就是唯一的最终状态。

练习

1. 将数字写在黑板上，其中，每次操作选取其中两个数字，将其擦除，并写上，经过步操作后只剩一个数，求这个数所有可能的值。

解：定义运算，则，且.

所以可以任意交换运算次序

，所以可能值只有

1. 我们有个石头分成堆，每一步我们从每一堆中拿出一个石头，形成一堆新的石头（如果原本有一堆只有一个石头，拿完之后这堆就消失了）。求证：无论初始情形如何，最后都会形成堆石头，每堆分别有个石头。

解：可以将石堆从大到小排列，从左至右排在二维坐标格点中，从位置开始排，第列对应到第堆石子。每个石头赋权，其中为石子的坐标，每次操作是将第一行放到第一列并且重新从大到小排序，总权重是不会减小的，如果第一行放到第一列时不是最多的列，那么会将这一列排到后面，会使总权重变大，总权重是一个整数，且显然有上界，所以，必定有限步之后会变成一个定值，下证此时不能有两列高度相同；

否则若干步操作后这两列相同的高度都为1，此时总的列数记为，操作一次后第一列高度变成，总行数变成，在操作一次最高的列变成，长度为的列需要与其换位置，总权重会减少，矛盾。

所以任何两列高度需要不同，设此时列数为，最高的列高度为，那么，否则下一步总权重也会减少，至少列，此时考虑石子总数，，石头恰好分别是，若，命题得证；若，则列数，任何两列高度不同，得最高列高度为，矛盾。得证。

1. 派对上有个人，每人有一些数量的硬币，每一次，手上有至少个硬币的人，给其余每个人个硬币（所以某次可能同时发生给一个硬币、给一个硬币），假设这个过程永远不会停止，即对于任意的正整数，总有人要在第次给出硬币，求总共至少有多少硬币？

解：如果总数为个硬币时，过程是不会终止的；下证总数小于有限步内一定终止。

首先问题可以化归为最少每次只操作一个人（从最多的开始操作），因为如果有多人可以同时操作，也可以一个一个从大到小操作。如果永远不会终止，我们将所有人的硬币从大到小排序，，那么其中最大数从某一次后达到下界（良序原理），不妨设从开始时最大数就达到下界。那么在第次操作中，第次一定操作，这次中一定不会操作两次，否则假设第二次操作是在第次，那么此时有个硬币，那么最大值在递减。第二次必然操作最大的，同理，在次之内不会操作两次，以此类推，这说明次操作恰好操作了，且之后的操作也是前次操作的循环，所以有，，则.得证

另证1：（杨振义 完系）每次操作，所有人，所以经过轮操作，每个人的硬币数都遍历了的完系，所以，其中表示第人在第轮的硬币数，所以存在某一轮，由平均值原理.

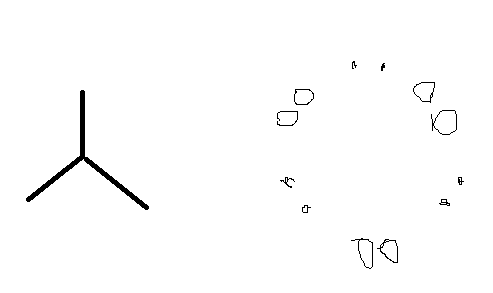
另证2：（杨奕乐 单调量量）首先问题可以化归为最少每次只操作一个人（从最多的开始操作），因为如果有多人可以同时操作，也可以一个一个操作。构造单调量，一次操作后，设某个原先有变为，不妨设操作的是，减小；

其余每个增加1，增加，所以减小量大于增加量，单调量递减，得证。

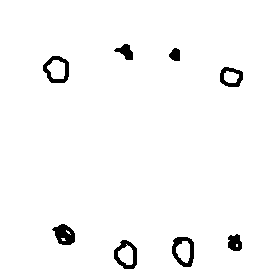
1. 一个正边形每个顶点有一只青蛙，在某刻，所有青蛙同时跳到相邻顶点中的一个（每个顶点可以有多只青蛙），假设跳完后，没有两只青蛙在一条过中心的对角线上，求出可能发生这种情形的全部的值。

解：考虑跳完后的情形，即任意相邻的三个点中，两边的点不能同时没有青蛙（有青蛙用实心点表示，没有用空心点表示），且对角线上必是一个实心一个空心。

当时，可以构造可行的跳法，以为例：



另外，用归纳法可以推断出图中有如下8个确定的顶点



可知如果存在可行的边形的跳法，必存在边形的跳法，容易验证，时，不存在可行的跳法，归纳得证。

1. 是一个连通图，有条边，考虑只青蛙，每只都在的某个顶点上。每一次如果一个顶点有超过只青蛙，则让其中只青蛙，每只跳向一个相邻的不同的顶点，求证：每个顶点一定会被在某个时刻，被某青蛙访问到。

证明：假设顶点上的青蛙数，，所以一定有点，从而任何时刻，过程都不会停止。可以对图的顶点数用归纳法：个顶点的图，在过程永不停止的情况下，每个顶点必能被访问。

假设某顶点永远不被访问，则说明其相邻的任一顶点永远有，但是如果是这样，是个在过程中不减的量，有限次后，一定会达到的最大值，在此之后也不再被访问。如果我们去掉顶点以及上的所有青蛙，得到图则，所以之后过程也永远不会停止，由归纳假设必能被访问，矛盾。

1. 正五边形每个顶点上放一个整数，可以的操作是，对于相邻的三个数且，可以用替代，什么情况下有限步可以使所有数都非负。

解：五个数之和不能是负数，若，那么只有时成立。若时，我们证明一定可行，用一对数表示状态，其中代表负数的个数，代表五个数中的最小数是几（若果有多个最小数，就算所有最小数之和），首要目标是使，其次是让变大。

如果五个数中最小的是，那么一次操作后，得到，如果

1），那么减小；2）如果，依次操作负项，或者减小，或者操作4次后变为，若时，，即不变，变大。

3）如果，3.1）如果，那么减小；3.2）如果操作4次后，且，那么不变，变大；

3.3）如果，再操作一次后，若，则即不变，变大（如果，则可将其打包操作，等效成只有四个数的情形），则再操作一次得，同理只要考虑；否则再操作一次得， 不变，变大；

以上只有两种情形，就是变小，或者不变变大，所以有限步后可得。

1. 有一些石头被放在一列两头无限长的方格中，方格用整数标记，每个方格中可以放置不止一块石头，有以下两种可行的操作：

（1）分别在标有的方格上拿走一块石头；并在标记的方格上放上一块石头；

（2）在标有的方格上拿走两块石头，并在标记的方格上分别放置一块石头；

求证：一定能达到某一步没有任何可行的操作，且这个最终状态是确定的（由初始状态唯一确定）。

证明：对每个方格中的石块，我们赋予权重，所以总权重不变；

假设是两个不同的最终状态，，

最终状态下每个方格至多一块，且没有连着的两个方格有石块，对于一个确定的状态（石块有限），可以用归纳法证明：若的最大指标是，那么的总权重

所以的最大权重方格是一样的，可以对元素个数归纳，即得是一样的状态。

下面只需说明这个过程有限步可以结束，反之，操作2需要操作无限次（操作1必只有有限次，因为石块个数有限），因此从某一步开始只有操作2，但是若位置上有石头，那么之后三个位置上必有一个位置会有石头，从而方格的编号会有下界，一定有位置被操作了无限次，其中最小的一个无限次操作的位置，一定会导致其左侧有更小的无限次操作的位置，矛盾。

1. 一个的棋盘上每格放一盏灯，每一次操作可以选定一格，改变这格与其相邻的格的状态（相邻的格即有一条公共边的格），初始时所有灯都处于关闭状态，经过有限步操作后，只有一盏灯亮着，求所有可能的亮灯位置。

解：构造不变量，取一个位置的子集，使得无论选定棋盘哪个位置，都不改变中亮灯数量的奇偶性，可以选如下两类子集（标1的位置形成集合）

11011 10101

00000 10101

11011 00000

00000 10101

11011 10101

由此可知所有标1的位置不可能单独亮着，下面证明其余五个位置都可以单独亮；

构造(2,4)位置（标1的操作，标0的不操作）：

00100

01110

10011

10010

01100

所以，由对称性，(4,2),(2,2),(4,4)都可以单独亮；

构造(3,3)位置：

11000

00100

10110

10001

01101

得证。

1. 是一列实数， 对于，从构造，过程如下：
2. 对于一个划分，，其中，若是最小的（允许或是空集，此时求和为），若有多种划分，则随机取一种；
3. 

求证：存在某个，使得中有一个元素满足.

证明：如果对于任意，，考察，先证明：，

反之，

所以，如果中有一项是正数，例如，那么只要改写这个数前面的记号即与的最小性矛盾；若 中有一项负数，例如，那么只要改变这个数前面的记号即与的最小性矛盾；反之，必有且，这与矛盾。

由此是一个单调量，且每次增加的量

由于只有有限种可能，所以必有最小正步长，，得证。

1. 每个国会成员（MP）都有一个绝对支持率，且每个成员需要加入一个组，一个MP的相对支持率指该成员的绝对支持率，比上该组中所有成员的绝对支持率之和。每天可有一个MP更换组，一个成员可以更换组仅当他更换后新的相对支持率比原先他的相对支持率更高，求证：有限天后，没有MP可换组。

解：设有个MP，绝对支持率为，个组，构造单调量，

若某人绝对支持率，原先组内其他人总和，换后组内其他人总和，则，单调量减少，这个减小量不会太小，得证。

1. 固定的正整数，有编号的位选手参加网球比赛，对于编号的选手比选手水平高，一共有编号为的个场地，初始时所有选手随机两两配对，每一轮每个场地恰有一场比赛（同时有场比赛进行），比赛结果一定是水平高的胜利。对于编号为场地上的胜者，下一轮将到场地比赛，败者留在原地；对于编号的场地的败者，下一轮到编号的场地上，胜者留在原地；求所有正整数，使得无论初始配对如何，第轮后号选手全部更换场地。

解：更换场地，即不动，称选手为弱者，记为第轮后场地上的弱者人数，所以.

如果，则;

对于初始状态，至少需要轮变成，从而.

如果，则（）；

如果，则，则.所以

若，则且其中有，矛盾，所以轮后一定变成；

而轮后号选手一定在号场地，所以轮后，号选手都到了不能动的位置，得.

1. 在一个无限的棋盘上玩单人跳棋游戏，初始时个棋子布置在的区域内，每一步可以选择一个子，跳过一个被占据的邻格，跳入一个未被占据的格子，且拿走该邻格中的子，求所有的，使得最终能够达到只剩一个子的状态。

解：最外侧的“L”型四个子，可以变成一个子：

空 空

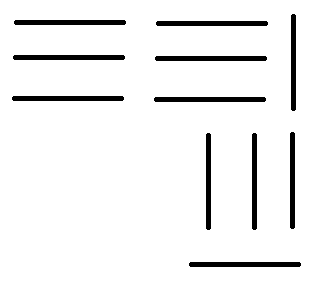
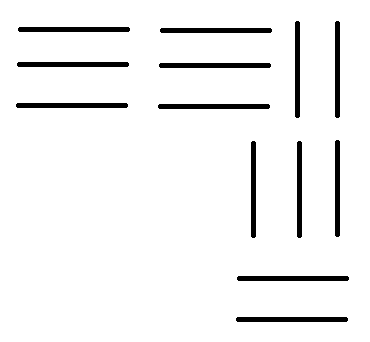
空 \* \* \* 变成： 空

\* \*

即可以去掉三个连在一起的子，下面说明当且仅当时可以达到一个子的状态，时结论显然；

若，则通过以下操作一次消去三连的子，递归到较小的情形；

若，同理递归到较小的情形。

下面证明：时不可行；，

位置的子赋值，则初始时三种值的子为，每一步操作增加或 或，即三个位置奇偶性始终相同，从而不可能到达最后或或的状态.

1. 2008个白石子和1个黑石子排成一排，一次操作包括选择一个黑石头并改变其相邻的石头的颜色，目标是在有限步后使全部石头变成黑色，求黑石头所有可能的初始位置。

解：最终状态只与各个位置操作次数的奇偶性有关，按初始黑石子操作次数、相邻石子操作次数可以分为四种情况：

（1）W W W W W W W W B W W W W W W W W

1 1 0 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1

B的左边和右边个数都是；

（2）W W W W W W W W B W W W W W W W W

1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 0 0 1

B的左边和右边个数都是

（3）W W W W W W W W B W W W W W W W W

0 1 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 0

B的左边和右边个数都是

（4）W W W W W W W W B W W W W W W W W

0 0 1 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 0

B的左边和右边个数都是

由总数，所以（1）（3）B的左边（2）（4）B的左边

只要确定了所有位置操作的奇偶性，那么一定可以做到这种操作，只要一直保持初始的黑石头是黑的，然后逐步从最两端的石头完成它必须完成的操作次数即可。

即当且仅当B在第位置时，可以做到。

1. 一列无限长的方格中，放入有限个硬币，每一次选择一个含有超过两个硬币的方格，拿出其中两个硬币分别放到左右两个方格中，直到所有方格中的硬币至多只有一个为止，求证：给出任何初始状态，一定在有限步操作后结束，并且得到的最终状态是由初始状态唯一确定的。

解：假设有限步一定会终止；观察到：

1）因为每个位置如果不操作，个数是不会减少的，而如果个数超过2个，一定会在某步被操作。所以初始超过2个的位置在将来一定会被操作。

2）状态是操作的位置的函数，虽然在不是按所有的顺序都可以操作，由操作的位置完全决定。所以不妨从初始状态起同时操作所有必须操作的位置；如果因为这种操作产生新的需要操作的位置，有1)可知即使在其他顺序下也必定也会需要操作。

所以只要每次都同时操作所有需要操作的位置，即得到唯一的最终状态，因此只需要证明假设：有限步操作一定会终止。

设是第个位置的硬币个数，；观察到重心不变，即，定义转动惯量，假设操作第个位置，则转动惯量增加，只需要证明确定的初始状态下，有限个硬币可能达到的分布状态的跨度是有限的，那么转动惯量会有上界，从而必定会停止。

而因为两个邻近的硬币之间的空格长度的最大值是不会增大的，所以跨度有上界，得证。

1. 给定正整数，和正整数；初始时有两串珍珠，一串有个白的，一串有个黑的，每次将所有串按照从大到小的顺序依次排好（如果长度相同，则白色的串排前面），操作为选择前串，每串都对半分成两串，两串的差不差过，若总共有不到串，则选择所有的串；直到产生第一个单独的白色珠子，整个过程结束，求证：此时一定存在一个黑色的串有至少两个珠子。

证明：引理：归纳证明每一时刻，黑色最短串长度与白色最长串长度，满足

初始时显然；若某一时刻，即，

1）若是由上一步中黑色串分出的，若上一步白色最长串同样是，因为该黑色的串都对半分了，所以所有的白色串也都应该被对半分，矛盾；所以是由上一步白色最长串分得的，上一步白色最长串至少，而上一步黑色最短串长度，由归纳假设得，上一步黑色最短串长度上一步白色最长串长度，所以上一步中长度的串是会被分半的，所以上一步中长度的白色串都会被分半，从而和这步最长白色串长为矛盾；

2）若不由上一步中黑色串分出，即也是上一步中最短的黑色串长度，由归纳假设上一步上一步最长白串长度这步最长白串长度，矛盾；

引理得证；

若题目不成立，即倒数第二步时，会有长度为或的白串，被对半分，同时不能有长度的黑色串，即所有黑串长度都，且此时所有长度为的黑串都会被对半分，

1）若此时没有长度为的黑串，则所有白串都在黑串的前面，且串的总数，所以之前每一步都是所有串全部平分的，由引理，白串长度只能全部是，只有唯一的方法把所有串还原，会得到初始时，矛盾；

2）若此时有长度为的黑串，由引理，所有白串长度都为，

所有长度为的黑串，则考虑倒数第三步，

情形1：如果此时有长度为的黑串，所有白串长度仍然是，所有倒数第二步中长度为的黑串都是由倒数第三步中长度或的黑串分出的，因为倒数第二步中所有黑串都可以同时继续分，所以倒数第三步中白串也都应该被对半分，从而直接就在倒数第三步操作完后终止过程，矛盾；

情形2：如果此时没有长度为的黑串，说明倒数第二步中长度为的黑串全都圆长度为的黑串配对，在倒数第三步中是长度为的黑串，因为倒数第二步中所有黑串都可以同时继续分，所以倒数第三步中白串也都应该被对半分，说明倒数第三步所有白串长度必为（不为，否则立即终止了），倒数第三步所有黑串长度必为或，且之前每一步都是所有串都对半分，有唯一的一种还原方法，所以初始时，矛盾。

第四章、存在性

“恶魔最精妙的诡计，是说服你他并不存在。” ——Charles Baudelaire

关于存在性，在最初的两章中，我们更多地给出了构造性的证明。对于不存在的情形，往往无法给出证明，即使在存在性的证明中，也不总是能用构造的方法显式证明，这种情况下我们用不那么直接的存在性证明。前两章中的技巧，诸如归纳法、不变量、极端原理等可以也可以适用于非构造性的证明，另外我们本章引入一些新的技术，诸如离散连续性、分治策略、“敌对邻居”技巧、单射法、极端原理的两种重要变式；本章例题中一个普遍的主题是归谬法证明，G.H.Hardy将其描述为数学家最精巧的工具。

1. 圆周上有个点，每个点标注了或，一个点被称为“好的”，如果从该点出发的部分和（顺时针或反时针任意长度连续的一段）全都是严格正的，试说明：如果标注的点少于个，那么至少有一个“好的”点。

证明：只要证个点中，如果标注的点个则至少有一个好点，用归纳法：

时，结论显然；

对于个点中的点个的情形，考察一个连续的段，其两头为，所以如果我们去除两头的和中间某个，则落入归纳假设，在这段外有一个好点，容易知道添上这三个点后仍然是好点，这是一个自上而下的归纳。

1. 将所有正整数分成个集合的无交并，即，求证其中有一个集合有如下性质：存在一个正整数，使得对于任意的，能找到，其中.

解：称有题目中性质的一个集合为“好的”，反证，设中没有任何一个集合是“好的”，用归纳法证明：，中含有任意长的连续整数列：

时，显然成立；假设中含有任意长的连续整数列，由于不是好的，所以对于任意的，存在，使得中任意连续的个数中必有差距超过的相邻的两数，观察一段长度为的包含在中的连续整数，

如果其中含有个，那么有两个相邻的数差距超过，从而含有这连续的个数；

如果其中含有个，由抽屉原理，必有一段连续长为的整数包含在中；

得证。

另解：若命题不成立，那么对于任意的，对于任意的，存在，使得中任意的个数都有两个相邻的数差距大于.

取，，

，，

考虑个连续的正整数，其中有一种数至少出现次，至少次，所以其中一定有连续两个数差距大于，即这中间的个数不出现该种数，即只有另外种数；依次类推，得有一段连续的个数只有种数，即连续的都是一种数，而这种数如果有个就会有两个相邻的数差距超过，所以它们中间不能有任何一种数，矛盾。